התכנית לתואר שני במנהל עסקים

מבחן דוגמה במתמטיקה

שם המרצה : ד"ר אלה סידורנקו

הוראות כלליות:

1. כל תשובה חייבת בנימוקים ברורים ומסודרים, הדגש את מספר השאלה בתחילתה.
2. חומר עזר: מחשבון כיס רגיל ודפי הנוסחאות המצורפות .
3. משך הבחינה : 150 דקות.

שאלה 1.

חקור את הפונקציה הבאה על פי הקריטריונים הבאים ושרטט את גרף הפונקציה:
תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון,
תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול,
אסימפטוטות אנכיות ואסימפטוטות משופעות.

$$y = \frac{-x^2+8x-12}{2x-3}$$

פתרון שאלה 1

תחום הגדרה

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה שווה ל-0, כלומר בנקודה $2x - 3 = 0$.

מכאן תחום ההגדרה הוא כל המספרים הממשיים פרט ל- $x = \frac{3}{2}$. נרשום את זה כך: $\{x|x \neq \frac{3}{2}\}$

נקודות חיתוך עם הצירים

נקודת החיתוך עם ציר ה- y (כלומר, הנקודה על הגרף בה $x = 0$) היא הנקודה (0, 4).

כדי למצוא נקודות החיתוך עם ציר ה- x (כלומר, הנקודות על הגרף בהן $y = 0$), נפתור את המשוואה הריבועית: $-x^2 + 8x - 12 = 0$.

נשתמש בנוסחה $x_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, כאשר בבעיה זו $a = -1, b = 8, c = -12$. נציב את הערכים בנוסחת המשוואה הריבועית, ונקבל:

$x_1 = 2$, $x_2 = 6$, ונקודות החיתוך עם ציר ה- x הן (2, 0), (6, 0).

תחומי עלייה וירידה

נגזור את הפונקציה. בשביל זה נשתמש בנוסחת נגזרת של מנה:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

תחילה נחשב $f(x)' = -2x + 8, g(x)' = 2$. נציב את הביטויים בנוסחת נגזרת המנה, ונקבל:

$y'_x = \frac{(-2x+8)(2x-3)-(-x^2+8x-12)*2}{(2x-3)^2} = \frac{-2x^2+6x}{(2x-3)^2}$.

נפתור את האי-שוויון: $-2x^2+6x \geq 0$. הוא מתקיים בתחום $[0,3]$, $x \neq \frac{3}{2}$. בקטע זה הפונקציה עולה.

נפתור את האי-שוויון: $-2x^2+6x \leq 0$. הוא מתקיים בתחום $(-\infty,0) \cup (3,\infty)$. בקטע זה הפונקציה יורדת.

<u>נקודות קיצון</u>

נשווה פונקציה נגזרת לאפס: $y'_x = \frac{-2x^2+6x}{(2x-3)^2} = 0$. מכן פונקציה נגזרת שווה לאפס בנקודות $x = 0$, $x = 3$. אחה הן נקודות הקיצון. נאחד את התוצאה עם תחומי עליה וירידה של הפונקציה שקיבלנו בסעיף הקודם, ונקבל: בנקודה $x = 0$ יש לפונקציה נקודת המינימום, ובנקודה $x = 3$ יש לפונקציה נקודת המקסימום.

<u>תחומי קמירות וקעירות</u>

נגזור פונקציה נגזרת ונמצא פונקציה נגזרת מסדר שני: $y''_x = \frac{-18}{(2x-3)^3}$, $x \neq \frac{3}{2}$

$y''_x > 0$ בקטע $x < \frac{3}{2}$ – כאן הפונקציה קעורה.

$y''_x < 0$ בקטע $x > \frac{3}{2}$ – כאן הפונקציה קמורה.

כאן השתמשתי בעובדה כי $(2x-3)^3 < 0$ כאשר $x < \frac{3}{2}$, ולכן $y''_x = \frac{-18}{(2x-3)^3} > 0$.

באופן דומה, $(2x-3)^3 > 0$ כאשר $x > \frac{3}{2}$, ולכן בקטע זה $y''_x = \frac{-18}{(2x-3)^3} > 0$.

<u>נקודות פיתול</u>